

16 décembre 2025

Corrigé 13

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, calculer le polynôme caractéristique de $\alpha : V \rightarrow V$. Calculer la multiplicité algébrique et la multiplicité géométrique de chaque valeur propre de α .

- (a) $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y) = (2x + y, -y)$.
 (b) $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$.
 (c) $V = \mathbb{C}^2$, $\alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$.
 (d) $V = M_2(\mathbb{R})$, $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -2d \\ -a & -b \end{pmatrix}$.

Solution 1.

- (a) La matrice de α par rapport à la base canonique E de $V = \mathbb{R}^2$ est $A = (\alpha)_{E,E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de α est

$$\det(A - t \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & -1-t \end{vmatrix} = (t-2)(t+1).$$

Donc les valeurs propres de α sont -1 et 2 . La multiplicité algébrique de -1 vaut 1 et celle de 2 est aussi 1.

L'espace propre E_{-1} est le noyau de $\alpha - (-1) \cdot \text{id}$. On résout le système homogène associé à la matrice de coefficients $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $E_{-1} = \{(x, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $f_1 = (1, -3)$ forme une base de E_{-1} . On obtient aussi que la multiplicité géométrique de -1 , qui est la dimension de E_{-1} , vaut 1.

L'espace propre E_2 est le noyau de $A - 2 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Donc $E_2 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $f_2 = (1, 0)$ forme une base de E_2 . On obtient aussi que la multiplicité géométrique de 2 , qui est la dimension de E_2 , vaut 1.

- (b) La matrice de α par rapport à la base canonique E de $V = \mathbb{R}^2$ est $A = (\alpha)_{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de α est $\det(A - t \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 2$. Ce polynôme n'a pas de racine dans \mathbb{R} , donc il n'existe pas de valeur propre pour α .

- (c) La matrice de α par rapport à la base canonique E de $V = \mathbb{C}^2$ est $A = (\alpha)_{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de α est $\det(A - t \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 2$. Donc les valeurs propres de α sont $1 \pm i$. La multiplicité algébrique de $1 + i$ vaut 1 et celle de $1 - i$ est aussi 1. L'espace propre E_{1+i} est le noyau de $\alpha - (1+i) \cdot \text{id}$. On résout le système homogène associé à la matrice de coefficients $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$. Donc $E_{1+i} = \{(-iy, y) \mid y \in \mathbb{C}\}$ et $f_1 = (-i, 1)$ forme une base de E_{1+i} . On obtient aussi que la multiplicité géométrique de $1 + i$, qui est la dimension de E_{1+i} , vaut 1.

L'espace propre E_{1-i} est le noyau de $\alpha - (1-i) \cdot \text{id}$; on résout le système homogène associé à la matrice de coefficients $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$. Donc $E_{1-i} = \{(iy, y) \mid y \in \mathbb{C}\}$ et $f_2 = (i, 1)$ forme une base de E_{1-i} . On obtient aussi que la multiplicité géométrique de $1-i$, qui est la dimension de E_{1-i} , vaut 1.

(d) Soit $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $V = M_2(\mathbb{R})$. Alors la matrice de α par rapport à la base E est $A = (\alpha)_{E,E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de α est

$$\det(A - t \cdot I_2) = \begin{vmatrix} -t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -t \end{vmatrix} = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})(t^2 + 1).$$

Comme $t^2 + 1$ n'a pas de racine dans \mathbb{R} , les valeurs propres de α sont $\pm\sqrt{2}$. La multiplicité algébrique de $\sqrt{2}$ vaut 1 et celle de $-\sqrt{2}$ est aussi 1.

L'espace propre $E_{\sqrt{2}}$ est le noyau de $\alpha - \sqrt{2} \cdot \text{id}$. On résout le système homogène associé à la matrice

de coefficients $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Donc $E_{\sqrt{2}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. On obtient aussi

que la multiplicité géométrique de $\sqrt{2}$, qui est la dimension de $E_{\sqrt{2}}$, vaut 1.

L'espace propre $E_{-\sqrt{2}}$ est le noyau de $\alpha - (-\sqrt{2}) \cdot \text{id}$. Comme avant on considère le système homogène

associé à la matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -2 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Donc $E_{-\sqrt{2}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. On obtient aussi que

la multiplicité géométrique de $-\sqrt{2}$, qui est la dimension de $E_{-\sqrt{2}}$, vaut 1.

Exercice 2. On considère l'application de transposition $\alpha : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ définie par $\alpha(A) = A^t \forall A \in M_2(\mathbb{R})$.

- Déterminer la matrice de α par rapport à la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ et calculer ses valeurs propres.
- Déterminer les espaces propres correspondant à chaque valeur propre et trouver une base de chaque espace propre.
- Montrer que α est diagonalisable.

Solution 2.

(a) Comme $\alpha(E_{ij}) = E_{ji}$, pour $1 \leq i, j \leq 2$, la matrice de α dans la base $C = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver le polynôme caractéristique de α , on développe le déterminant par rapport à la première ligne et aussi par rapport à la dernière ligne, et on trouve

$$c_\alpha(t) = \det(A - t \cdot I_4) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (t-1)^3(t+1).$$

Ce polynôme admet les racines 1 et -1 , qui sont les valeurs propres de α .

- (b) L'espace propre correspondant à la valeur propre 1 est l'espace des matrices dites "symétriques", car $\alpha(A) = 1 \cdot A$ si et seulement si $A^t = A$. C'est aussi le noyau de $\alpha - \text{id}$, qui s'obtient en résolvant le système $(A - I_4)X = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Les inconnues x, z, t sont libres et y est l'unique inconnue principale. Une base de l'espace des solutions est alors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc une base du noyau de $\alpha - \text{id}$ est formée du 1er vecteur de la base, du 4ème, et de la somme des 2ème et 3ème. Ainsi l'espace propre correspondant à la valeur propre 1 est $\text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21})$, de dimension 3.

L'espace propre correspondant à la valeur propre -1 est l'espace des matrices antisymétriques, car $\alpha(A) = (-1) \cdot A$ si et seulement si $A^t = -A$. C'est aussi le noyau de $\alpha + \text{id}$, qui s'obtient en résolvant le système $(A + I_4)X = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ 2t = 0 \end{cases}$$

La seule inconnue libre est z et donc une base du noyau de $\alpha + \text{id}$ est formée d'un seul vecteur, la différence des 2ème et 3ème vecteurs de la base C . En d'autres termes, l'espace propre correspondant à la valeur propre -1 est $\text{Vect}(E_{12} - E_{21})$, de dimension 1.

- (c) Les 4 vecteurs propres obtenus en (b), à savoir $E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}, E_{12} - E_{21}$, forment une base de l'espace entier $M_2(\mathbb{R})$ (vérification facile!). L'existence d'une base formée de vecteurs propres est une caractérisation des transformations linéaires diagonalisables. Donc α est diagonalisable.

Argument alternatif : Le polynôme caractéristique de α est scindé et pour chaque valeur propre, la multiplicité géométrique de la valeur propre est égale à sa multiplicité algébrique.

Exercice 3. Soit $b \in \mathbb{R}$ fixé et $\alpha : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ l'application suivante :

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix}.$$

On admettra que α est une application \mathbb{R} -linéaire.

- (a) Calculer le polynôme caractéristique de α et trouver ses valeurs propres.
 (b) Trouver les espaces propres correspondants.
 (c) Déterminer si α est diagonalisable. Le cas échéant, trouver une base formée de vecteurs propres et expliciter la formule de changement de base.

Solution 3.

(a) Les images des matrices de la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ sont :

$$\alpha(E_{11}) = E_{12}, \quad \alpha(E_{12}) = E_{11}, \quad \alpha(E_{21}) = (b+1)E_{21} + E_{22}, \quad \alpha(E_{22}) = -bE_{21}$$

de sorte que la matrice de α dans cette base est

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule $\det(M_\alpha - tI_4)$:

$$\det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b+1-t & -b \\ 0 & 0 & 1 & -t \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} b+1-t & -b \\ 1 & -t \end{pmatrix}$$

$= (t^2 - 1)(t - b)(t - 1) = (t - 1)^2(t + 1)(t - b)$. Les valeurs propres de α sont donc 1, -1 et b .

- (b) Supposons d'abord que $b \neq \pm 1$. Les cas de $b = 1$ et $b = -1$ sont couverts dans la partie (c), ci-dessous. Une matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ appartient à l'espace propre E_1 si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = y \\ y = x \\ z = (b+1)z - bt \\ t = z \end{cases}$$

Toutes ces relations se ramènent à $x = y$ et $t = z$. On a donc

$$E_1 = \text{Vect}(E_{11} + E_{12}, E_{21} + E_{22}) \quad \text{et} \quad \dim(E_1) = 2.$$

Une matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ appartient à l'espace propre $E_{-1} \iff$

$$\begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x = y \\ -y = x \\ -z = (b+1)z - bt \\ -t = z \end{cases}$$

Ces relations donnent $x = -y$ et $t = -z = (2b+1)z$. Comme on a supposé que $b \neq -1$, il résulte que $z = t = 0$. Par conséquent $E_{-1} = \text{Vect}(E_{11} - E_{12})$. On a donc $\dim(E_{-1}) = 1$.

Enfin, une matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ appartient à l'espace propre E_b si et seulement si

$$\begin{pmatrix} bx & by \\ bz & bt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ (b+1)z - bt & z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} bx = y \\ by = x \\ bz = (b+1)z - bt \\ bt = z \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $b^2x = x$, donc $x = y = 0$, car $b \neq \pm 1$. Les deux dernières impliquent $z = bt$ et avec $z \in \mathbb{R}$ quelconque. En conclusion $E_b = \text{Vect}(bE_{21} + E_{22})$, de dimension 1.

- (c) De ce qui précède il est clair que si $b \neq \pm 1$, alors $c_\alpha(t)$ est scindé et les multiplicités algébriques et géométriques coïncident pour chaque valeur propre. L'application α est diagonalisable. La matrice de passage de la base canonique F à la base $F' = \{E_{11} + E_{12}, E_{21} + E_{22}, E_{11} - E_{12}, bE_{21} + E_{22}\}$ est

$$(\text{id})_{F',F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$(\alpha)_{F'} = (\text{id})_{F,F'}(\alpha)_F(\text{id})_{F',F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Si $b = 1$, on a $c_\alpha(t) = (t-1)^3(t+1)$. Les espaces propres ne changent pas et α n'est **pas** diagonalisable dans ce cas, car $2 = m_{\text{geom}}(1) < m_{\text{alg}}(1) = 3$.

Si $b = -1$, alors $c_\alpha(t) = (t-1)^2(t+1)^2$. Parcourant l'étude de E_{-1} on constate que la condition $-z = (2b+1)z$ est satisfaite pour tout $z \in \mathbb{R}$, donc $E_{-1} = \text{Vect}(E_{11} - E_{12}, E_{21} - E_{22})$. Dans ce cas $\dim(E_{-1}) = 2$ et

$$m_{\text{geom}}(1) = m_{\text{alg}}(1) = m_{\text{geom}}(-1) = m_{\text{alg}}(-1) = 2,$$

donc α est diagonalisable. La matrice de passage de la base canonique F à la base $F'' = \{E_{11} + E_{12}, E_{21} + E_{22}, E_{11} - E_{12}, E_{21} - E_{22}\}$ est

$$\text{id}_{F'',F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et on vérifie que $(\text{id})_{F,F''}(\alpha)_F(\text{id})_{F'',F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Exercice 4. Pour quelles valeurs de a et b la matrice $M = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

Solution 4. Le polynôme caractéristique vaut

$$c_M(t) = \det \begin{pmatrix} a+b-t & b \\ -b & a-b-t \end{pmatrix} = (t-a)^2.$$

Donc la seule valeur propre est a . Les vecteurs propres correspondants sont les solutions non nulles du système $(M - a \cdot I_2)X = 0$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

autrement dit $b(x + y) = 0$.

Si $b \neq 0$, on trouve $y = -x$ et donc l'espace propre est $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, de dimension 1. Comme ce sont les seuls vecteurs propres de M , on voit que l'espace entier, qui est de dimension 2, ne peut pas avoir une base formée de vecteurs propres. Donc M n'est pas diagonalisable.

Si $b = 0$, alors le système ci-dessus se réduit à $0 = 0$. Par conséquent, tous les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont des solutions, donc des vecteurs propres (pour la valeur propre a). Dans ce cas, il existe une base formée de vecteurs propres (on peut prendre par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Donc M est diagonalisable. En fait, cela saute aux yeux car, si $b = 0$, la matrice M est déjà diagonale.

En résumé, M est diagonalisable si et seulement si $b = 0$ (indépendamment de la valeur de a).

Exercice 5.

(a) Soit $\alpha : V \rightarrow V$ une transformation linéaire d'un K -espace vectoriel V . On suppose que V est de dimension 5, que α possède exactement 4 valeurs propres distinctes, et que $\mathfrak{S}(\alpha)$ est de dimension 3. Montrer que α est diagonalisable.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & C \\ 0 & 2 & \\ 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{C})$, où $C \in M_{2 \times 3}(\mathbb{C})$ et $D \in M_3(\mathbb{C})$. Supposons que $c_A(t) = (t - 2)^2 t^2 (t + 1)$ et que $\text{rang}(D) = 2$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

Solution 5.

(a) Commençons par constater que le polynôme caractéristique $c_\alpha(t)$ est de degré 5 avec 4 racines distinctes, donc il est scindé, l'une des 4 racines est de multiplicité algébrique 2, et les 3 autres sont de multiplicité algébrique 1.

Par le théorème du rang, $\ker(\alpha)$ est de dimension $5 - 3 = 2$. Donc $\lambda_1 = 0$ est une valeur propre de α , avec espace propre correspondant $\ker(\alpha)$, et donc $m_{geom}(0) = \dim(\ker(\alpha)) = 2$. Il s'ensuit que $m_{alg}(0) \geq 2$. Comme toutes les valeurs propres sont de multiplicité algébrique 1, sauf une qui est de multiplicité 2, on doit avoir $m_{alg}(0) = 2$. En particulier $m_{geom}(0) = m_{alg}(0)$.

Par ailleurs α possède 3 autres valeurs propres $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, avec des multiplicités algébriques 1, donc des multiplicités géométriques aussi égales à 1 (car $1 \leq m_{geom}(\lambda_i) \leq m_{alg}(\lambda_i)$). On voit que chaque multiplicité géométrique est égale à la multiplicité algébrique correspondante. Par conséquent, α est diagonalisable.

(b) On note que $(1, 0, 0, 0, 0)^t$ et $(0, 1, 0, 0, 0)^t$ sont des vecteurs propres linéairement indépendants pour la valeur propre 2 et donc $m_{geom}(2) = m_{alg}(2)$. Pour la valeur propre 0 : comme $\text{rang}(D) = 2$, on déduit que $\text{rang}(A) = 4$ et donc $\dim(\ker(A)) = 1$ et $m_{geom}(0) = 1 < 2 = m_{alg}(0)$. Donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 6. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$.

(a) Montrer que A est trigonalisable.

(b) Trigonaliser A en explicitant la formule de changement de base.

Solution 6.

(a) Le polynôme caractéristique est

$$c_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-t & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 5-t \end{vmatrix} = (t-2)^2(t-1)(t-3)$$

qui est scindé. Donc A est trigonalisable.

(b) En regardant les deux premières colonnes de A , on voit que les deux premiers vecteurs de base e_1 et e_2 sont déjà des vecteurs propres, pour la valeur propre 2. On cherche maintenant des vecteurs propres pour la valeur propre 1. Le système $A - I_4 = 0$ a un espace de solutions de dimension 1,

engendré par le vecteur $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On prend donc f_3 comme 3ème vecteur de base. Pour

obtenir une matrice triangulaire supérieure, on n'a pas besoin de se préoccuper du dernier vecteur de base. On prend donc un 4ème vecteur de base f_4 , par exemple $f_4 = e_4$, afin d'obtenir une base $B = (e_1, e_2, f_3, e_4)$. La matrice de changement de base et son inverse sont alors

$$S = (id)_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (id)_{C,B} = S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et la formule de changement de base nous donne

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

qui est bien triangulaire supérieure.

Exercice 7. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés et $n \geq 2$. On considère la matrice $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec

$$A_{ij} = \begin{cases} a & \text{si } i = j, \\ b & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

- (a) Montrer que $a - b$ est une valeur propre de A et trouver l'espace propre correspondant.
- (b) Montrer que le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$ est un vecteur propre. Pour quelle valeur propre ?
- (c) Montrer que A est diagonalisable.
- (d) Trouver une base formée de vecteurs propres, et quand $n = 3$, expliciter la formule de changement de base.

Solution 7.

- (a) Le scalaire $a - b$ est une valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - (a - b) \cdot I_n$ n'est pas inversible si et seulement si $\det(A - (a - b) \cdot I_n) = 0$. Or, par définition de A , on voit que $A - (a - b) \cdot I_n$ est la matrice dont tous les coefficients sont b , donc est de déterminant nul. Par conséquent, $a - b$ en est une valeur propre.

L'espace propre associé à la valeur propre $a - b$ est le noyau de $A - (a - b) \cdot I_n$. On distingue deux cas.

Si $b = 0$, alors $A - (a - b) \cdot I_n$ est la matrice nulle, donc $E_{a-b} = V = \mathbb{R}^n$, l'espace entier. La base canonique de $V = \mathbb{R}^n$ en est une base.

Si $b \neq 0$, on effectue les opérations élémentaires suivantes sur les lignes de $A - (a - b) \cdot I_n$:

$$L_1 \rightarrow \frac{1}{b}L_1, L_2 \rightarrow L_2 - bL_1, L_3 \rightarrow L_3 - bL_1, \dots, L_n \rightarrow L_n - bL_1,$$

et on obtient une matrice échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc x_2, \dots, x_n sont les variables libres et l'espace propre E_{a-b} est de dimension $n - 1$. Plus précisément,

$$E_{a-b} = \{(-x_2 - x_3 - \dots - x_n, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Une base de E_{a-b} est donnée par

$$((-1, 1, 0, 0, \dots, 0), (-1, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (-1, 0, 0, \dots, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, \dots, 0, 1, 1)).$$

- (b) Notons $v = (1, 1, \dots, 1)$ le vecteur qui vaut 1 partout. Soit E la base canonique de \mathbb{R}^n . Alors

$$w = (v)_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un simple calcul donne $Aw = (a + (n - 1)b)w$. Donc $a + (n - 1)b$ est une valeur propre de A et v est un vecteur propre associé à cette valeur propre. Donc $\dim(E_{a+(n-1)b}) \geq 1$.

Constatons que si $b \neq 0$, $a + (n - 1)b \neq a - b$ et ces deux valeurs propres sont distinctes.

- (c) Si $b = 0$, la matrice $A = aI_n$ qui est une matrice diagonale, qui est bien sûr diagonalisable.

On peut aussi remarquer que l'on a trouvé une base formée de vecteurs propres lorsque $b = 0$, donc A est diagonalisable.

Si $b \neq 0$, alors d'après a), $a - b$ est une valeur propre de A et E_{a-b} est de dimension $n - 1$; d'après b), $a + (n - 1)b$ est une autre valeur propre et l'espace propre correspondant est de dimension au moins 1. Comme la somme d'espaces propres associés à des valeurs propres différentes est une somme directe, la somme directe de E_{a-b} et de $E_{a+(n-1)b}$ est de dimension $\geq (n - 1) + 1 = n$. Donc $V = E_{a-b} \oplus E_{a+(n-1)b}$. Par conséquent, A est diagonalisable lorsque $b \neq 0$. Constatons que cela montre aussi que $\dim(E_{a+(n-1)b}) = 1$.

En résumé, dans les deux cas, A est diagonalisable.

- (d) Si $b = 0$, d'après c), la base canonique $F := E$ est une base formée de vecteurs propres.

Si $b \neq 0$, une base formée de vecteurs propres est donnée par l'union d'une base de E_{a-b} et d'une base de $E_{a+(n-1)b}$, par exemple, on peut prendre

$$F := ((-1, 1, 0, \dots, 0, 0), (-1, 0, 1, \dots, 0, 0), \dots, (-1, 0, 0, \dots, 1, 0), (-1, 0, 0, \dots, 0, 1), (1, 1, 1, \dots, 1, 1)).$$

Supposons maintenant que $n = 3$. On note α la transformation linéaire de $V = \mathbb{R}^n$ définie par A par rapport à la base canonique E .

Si $b = 0$, alors $F = E$. Donc la matrice de changement de base de E à F ainsi que celle de F à E sont la matrice identité et la formule de changement de base donne

$$B = (\alpha)_{F,F} = (Id)_{E,F} \cdot A \cdot (Id)_{F,E} = I_n \cdot A \cdot I_n = A.$$

Si $b \neq 0$, alors $F = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 1))$. Donc $S = (Id)_{F,E} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. et

$S^{-1} = (Id)_{E,F} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. La formule de changement de base donne

$$\begin{aligned} B &= (\alpha)_{F,F} = S^{-1}AS \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Soit $V = \mathbb{C}[t]_{\leq 3}$ et $\alpha : V \rightarrow V$ définie par

$$\alpha(P(t)) = P(t) - (t+1)P'(t).$$

Déterminer les valeurs propres de α et les espaces propres correspondants en indiquant une base pour chacun. L'application α est-elle diagonalisable ?

Solution 8. Soit $F = \{1, t, t^2, t^3\}$ la base canonique de $\mathbb{C}[t]_{\leq 3}$. On calcule

$$\begin{cases} \alpha(1) &= 1 \\ \alpha(t) &= t - (t+1) = -1 \\ \alpha(t^2) &= t^2 - (t+1)2t = -t^2 - 2t \\ \alpha(t^3) &= t^3 - (t+1)3t^2 = -2t^3 - 3t^2 \end{cases}$$

donc la matrice de α par rapport à la base F est

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a $c_\alpha(t) = \det(M_\alpha - tI_4) = t(t-1)(t+1)(t+2)$. On note que ce polynôme est scindé. Les valeurs propres sont donc 0, 1, -1 et -2. Il y a 4 valeurs propres distinctes, dont les multiplicités géométriques et algébriques sont forcément égales et par conséquent α est diagonalisable.

Pour étudier les espaces propres, écrivons $P(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Calcul de $E_0 = \ker(\alpha)$. On a $P(t) \in \ker(\alpha) \iff$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a-b &= 0 \\ -2c &= 0 \\ -c-3d &= 0 \\ -2d &= 0 \end{cases}$$

ce qui donne $c = d = 0$ et $a = b$. Par conséquent $\ker(\alpha) = \text{Vect}(1 + t)$.

On procède de manière similaire pour les autres valeurs propres. Les coordonnées des vecteurs de E_1 satisfont le système :

$$\begin{cases} a - b & = a \\ -2c & = b \\ -c - 3d & = c \\ -2d & = d \end{cases}$$

d'où $d = c = b = 0$ et $E_1 = \text{Vect}(1)$.

Pour E_{-1} on obtient le système

$$\begin{cases} a - b & = -a \\ -2c & = -b \\ -c - 3d & = -c \\ -2d & = -d \end{cases}$$

avec les solutions $d = 0$, $a = c \in \mathbb{C}$, $b = 2a$, donc $E_{-1} = \text{Vect}(1 + 2t + t^2)$.

Finalement, pour E_{-2} on a

$$\begin{cases} a - b & = -2a \\ -2c & = -2b \\ -c - 3d & = -2c \\ -2d & = -2d \end{cases}$$

avec comme solutions $a = d \in \mathbb{C}$, $b = c = 3a$, donc $E_{-2} = \text{Vect}(1 + 3t + 3t^2 + t^3) = \text{Vect}((1 + t)^3)$.

Notons par $F' = \{t + 1, 1, 1 + 2t + t^2, 1 + 3t + 3t^2 + t^3\}$. Nous avons

$$S = (id_V)_{F',F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de α par rapport à la base F' est

$$S^{-1}(\alpha)_{F',F}S = M'_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$